DEVOIR DE SYNTHESE N°2

EXERCICE N°1 : 10' 3 points

Répondre par **vrai** ou **faux** en **justifiant**

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^4+1\right)}{x}=0$

2°) Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x)=\ln(1-\ln x)$ est $]0,e[$.

3°) $\int_e^{e^2}\dfrac{(\ln x)^3}{x}dx$ est égal à 8.

4°) Soit G la fonction définie sur IR par : $G(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt$ et F la fonction définie sur $\left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$F(x)=G(\tan x)=\int_0^{\tan x}\dfrac{1}{1+t^2}dt$. Alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}=1$.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Pour tout $n\in IN^*$ on pose $I_n=\int_1^e\dfrac{\left(\ln(x)\right)^n}{x^2}dx$.

1°) Soit la fonction h définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\dfrac{\ln(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}-h'(x)$ où h' est la fonction dérivé de h.

b) En déduire que $I_1=1-\dfrac{2}{e}$.

2°) a) À l'aide d'une intégration par partie montrer que : $I_{n+1}=-\dfrac{1}{e}+(n+1)\,I_n$.

b) En déduire la valeur de I_2 et I_3.

3°) Soit l'ensemble $\Gamma=\left\{M(x,y)\in P \text{ tel que } y=\dfrac{\left(\ln(x)\right)^2}{x} \text{ et } 1\le x\le e\right\}$ et **S** le solide obtenu par rotation de Γ autour de l'axe des abscisses. Calculer le Volume $\mathcal{V}$ de **S**.

4°) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Montrer que Pour tout $n\in IN^*$, $0\le I_n\le\dfrac{1}{ne}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

EXERCICE N°3 :	25'	5 points	

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. m étant un paramètre réel.

On considère S' : $x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z+2=0$ et les plans $Q: x-y+z+3=0$ et $P_m: mx-my-z+m=0$.

I. 1°) Montrer que S' est une sphère dont on précisera le centre J et le rayon R.

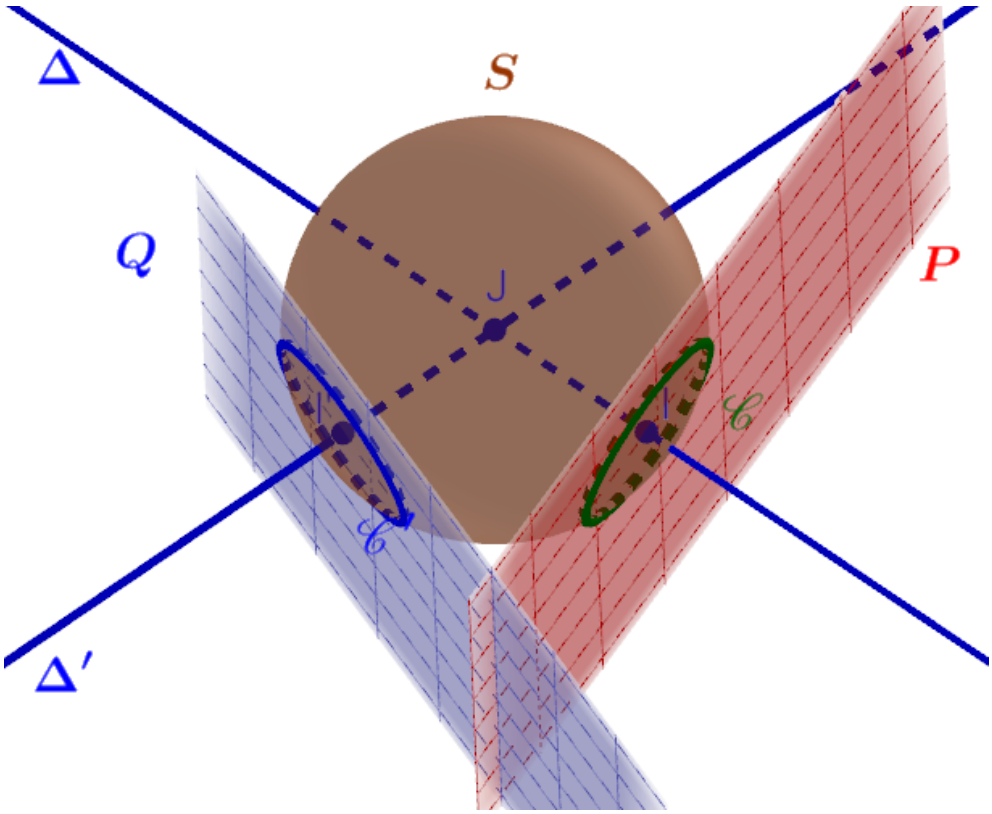
2°) Montrer que P_2 coupe S' selon un cercle Γ dont on déterminera le centre H et le rayon r.

Dans toute la suite on prend : $m=1$ et on pose $P=P_1$ et $J(-1,1,2)$.

II. Soient les points $I(0,0,1)$ et $I'(-2,2,1)$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 1 contenu dans le plan P, et le cercle $\mathscr{C}'$ de centre I' et de rayon 1 contenu dans le plan Q.

On désigne par Δ l'axe du cercle $\mathscr{C}$ et par Δ' l'axe du cercle $\mathscr{C}'$.

On se propose de démontrer qu'il existe une sphère S contenant $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.



1°) Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites Δ et Δ'.

2°) Montrer que les droites Δ et Δ' sont sécantes au point $J(-1,1,2)$.

3°) Soit N un point de $\mathscr{C}$ et N' un point de $\mathscr{C}'$. Montrer que : $NJ=N'J$.

4°) Déduire qu'il existe une sphère S contenant $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE N°4 :	40'	7 points	

Soit f définie sur IR et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On désigne par : • g la restriction de f à l'intervalle $]0,+\infty[$.

• h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,0]$.

1°) On donne $g(x)=x(1-\ln(x))$ pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$. Que peut- on dire de la branche infinie de $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$?

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation $g(x)=0$.

2°) On suppose que h vérifier les conditions suivantes :

- h est dérivable sur $]-\infty,0]$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(h(x)-2x)=0$.
- Le tableau de variation de h est ci-contre :

x	$-\infty$		0
$h'(x)$		$+$	1
h	$-\infty$	↗	0

- Pour tout x appartiennent à $]-\infty,0]$ on a : $2x\le h(x)\le x$.

a) Justifier que h est une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n=h^{-1}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ où h^{-1} désigne la fonction réciproque de h.

Montrer que la suite $(U_n)_{n\in N^*}$ est convergente.

3°) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f sue IR.

4°) a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $-\infty$, une asymptote dont on donnera une équation cartésienne.

b) Tracer $\mathscr{C}$ en précisant les demi-tangentes au point O.

5°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la région de plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droite d'équations $x=1$ et $x=e$.